MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 5
22.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Bestimmen Sie zur Grundmenge $\mathbb{Q}$ jeweils die Definitions- und Lösungsmenge von

   a) $\dfrac{x}{3-x} - \dfrac{x^2+9}{9-x^2} = 1 - \dfrac{x}{3+x}$ b) $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1+\frac{4}{x}}} = x.$

2. Bestimmen Sie die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right[\;\middle|\; \sqrt{3x-2} - \sqrt{4x+1} = -1 \right\}.$$

   (Dabei dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.)

3. Für den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ betrachten wir die Teilmenge $K := \left\{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Auf dem 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 3, wurde schon gezeigt, daß für $x, y \in K$ auch $x + y$, $x \cdot y$ sowie $-x$ in K liegen.

   a) Zeigen Sie $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ und überlegen Sie, welche Körperaxiome von $\mathbb{R}$ sich auf K übertragen.

   b) Bestätigen Sie
$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2$$
   für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und zeigen Sie damit, daß für alle $x \in K \setminus \{0\}$ auch $\frac{1}{x}$ in K liegt.

   c) Begründen Sie, daß $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

   a) Es seien $p, q \in K$ gegeben, und es sei bekannt, daß es ein $w \in K$ gibt mit $p^2 - q = w^2$. Zeigen Sie, daß dann für alle $x \in K$ gilt:
$$x^2 + 2px + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -p + w \text{ oder } x = -p - w.$$
   (Bemerkung: Dies ist im Wesentlichen eine Version der aus der Schule bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen, die über jedem Körper funktioniert. Zum Beweis darf die Lösungsformel aber nicht verwendet werden!
   Führen Sie den Beweis stattdessen mit quadratischer Ergänzung, indem Sie schreiben: $x^2 + 2px + q \;=\; x^2 + 2px + p^2 - p^2 + q = \ldots$

   b) Lösen Sie für $K = \mathbb{Q}$ die Gleichung $x^2 + 10x + 21 = 0$ mit Hilfe von a).

Abgabe bis 29.11.2019, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).